***г. Мурманск 18.04.2015г. лицей №4***

**Открытая олимпиада по математике**

**“Кубок Андреева”.**

***РЕШЕНИЯ***

***6 класс***

1) Существует ли такое натуральное число, что произведение суммы его цифр на их количество равно 2015?

**Ответ:** *да, существует*.

**Решение**: Достаточно привести пример: 1000...000 (2014 нулей) и убедиться, что требования выполняются.

2) Петя разрезает листы бумаги. Первый лист он не трогает, второй разрезает на 2 части, третий – на 3 части, …, n-й лист на n частей. Ему необходимо получить 157 листов бумаги. Какой по счёту лист он разрежет последним?

**Ответ:** *18-ый*.

**Решение:** Вычислив сумму чисел 1+2+...+17=(1+17)\*17:2=153, понимаем, что разрезав 17 листов, Петя получит только 153 листа.

3) Решите ребус

**КНИГА + КНИГА + КНИГА = НАУКА**

если каждая буква означает цифру, одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры.

**Ответ:** *единственное решение* *28375+28375+28375=85125* .

**Решение:** Перепишем ребус в виде **КНИГА × 3 = НАУКА**

Тогда А=0 либо А=5 (разряд единиц). Если А=0, то Н в разряде тысяч равно либо 3 (если из сотен переходит 1), либо 6 (если из сотен переходит 2). Но оба варианта невозможны, т.к. К×3+1≠3 и К×3+2≠6. Следовательно, **А=5**.

К в старшем разряде может принимать значения 1,2 или 3(иначе в результате получим шестизначное число). Если К=1,то Н в ответе 3 или 4. Но ни один из данных вариантов не подходит в разряде тысяч. Если К=3, то Н=9, что также не подходит в разряде тысяч. Следовательно, **К=2**.

Г×3+1=2 или 12 или 22 (разряд десятков). Следовательно, **Г=7**.

Н в ответе может принимать значения 6, 7 или 8. 7 уже занята, а 6 в тысячах не может дать тот же результат в десятках тысяч ответа. Следовательно, **Н=8**.

Получаем в сотнях: И×3+2=10+У. Следовательно, И×3=8+У, откуда 2<И<6. 4 и 5 не подходят, т.к. будут повторы значений различных букв. Следовательно, **И=3**, а **У=1**.

4) Медведь научил Машу вырезать треугольники из бумаги и пообещал ей за каждый вырезанный треугольник конфету. Маша, надеясь, что медведь не заметит, отрезает от новой четырехугольной скатерти медведя за один прямолинейный разрез по треугольнику так, что оставшаяся часть не является треугольником. Сколько конфет в мечтах может получить Маша, если она сделала больше 10, но меньше 14 разрезов и скатерть, как и раньше, имеет форму четырёхугольника?

**Ответ:** *Маша может получить любое количество конфет от 11 до 13.*

**Решение:** Несложно заметить, что при отрезании прямолинейным разрезом от многоугольника треугольника по правилам задачи можно увеличить количество углов на1, или уменьшить на 1, или сохранить количество углов. Следовательно, выполнив любое количество разрезов, можно получить такое же количество треугольников. Для получения максимального балла достаточно было привести

пример разрезания, **верно указав порядок** выполнения операций.

5) Знайка поделился своими наблюдениями с малышами. Он заметил, что если цифры

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

написать палочками, как на калькуляторе, то каждая из этих цифр, в отличие от остальных, при перевороте также останется цифрой! Знайка озадачился вопросом: "Сколько различных двузначных чисел можно составить из этих цифр так, что при перевороте числа получится двузначное число и сумма цифр при этом сохранится?" Помогите Знайке ответить на вопрос.

**Ответ:** *таких чисел 18.*

**Решение:** Заметим, что под "переворотом" Знайка понимал именно поворот на 1800 , а не симметрию относительно вертикальной прямой, как посчитали некоторые. Ведь при данной симметрии цифры 6 и 9 перестают быть цифрами! При перевороте цифры 0,1,2,5 и 8 сохраняются, а 6 и 9 превращаются друг в друга. Поскольку после переворота двузначного числа должно получится опять двузначное, 0 не может быть использован при написании искомых чисел.

Так как цифры 1,2,5 и 8 сохраняются, то числа, записанные этими цифрами, не изменят сумму своих цифр. Таких чисел 4×4=**16** (можно было их перечислить: 11, 12, 15, 18, 21, 22, 25, 28, 51, 52, 55, 58, 81, 82, 85, 88).

Но существует ещё **два** числа, 69 и 96, которые при переворачивании не изменяются.

***РЕШЕНИЯ***

***7 класс***

1) Чеширский кот улыбнулся Алисе и стал исчезать. Каждую секунду от него остаётся ¾ того, что исчезает. Когда (через целое количество секунд) остаётся меньше 1/100 кота, он мгновенно исчезает совсем. Успеет ли Алиса сфотографировать хотя бы какую-то часть кота, если на установку фотовспышки и сам снимок ей требуется не меньше 7 секунд?

**Ответ:** *не успеет.*

**Решение:** ***К сожалению, большинство учащихся невнимательно прочли условие задачи и не поняли, какая же часть кота исчезает ежесекундно***. "Каждую секунду от него остаётся ¾ **ТОГО, ЧТО ИСЧЕЗАЕТ**", а не ¾ того, что было! Анализ этого условия задачи и приводит к решению:

Пусть х - часть кота, которая исчезает ежесекундно. Тогда остаётся 0,75х и х+0,75х=1. Откуда х=4/7. Следовательно, ежесекундно от кота остаётся 3/7 того, что было! Кота ежесекундно УМНОЖАЮТ на 3/7!

Т.е. после 6 секунд от кота должна остаться (3/7)6 его часть. Таким образом, необходимо сравнить (3/7)6 и 1/100:

(3/7)6 = 729/117649 < 729/72900 = 1/100.

Значит, после 6-ой секунды от кота ничего не останется.

2) Семиклассник Сеня Сидоров написал на доске трёхзначное число, в записи которого нет ни одного нуля. Затем он подписал все числа, которые можно получить из написанного числа перестановкой цифр. Сумма всех написанных на доске чисел составила 2775. Какое число придумал Сеня? Найдите все варианты ответа и докажите, что других быть не может.

**Ответ:** *Сеня мог написать на доске одно из чисел 799, 979,994, 988,898 или 889.*

**Решение:** Возможны три варианта вида числа, написанного Сеней:

- Все цифры одинаковые. Но в этом случае можно составить только одно число и это не 2775;

- Все цифры различны. Обозначим их а, b, c. Тогда возможно составить шесть чисел: .

*Напомним, что запись обозначает трёхзначное число, в котором x- цифра сотен, y - цифра десятков, а z - цифра единиц. Следовательно, =100x+10y+z.*

Сложим все шесть чисел:= 222(а + b + c). Но полученное число - чётное, т.е. не может быть равно 2775;

- Одна из цифр повторяется. Тогда возможно составить три различных числа:

. Сложим их: = 222a + 111b = 111(2a + b) = 2775.

Следовательно (2a + b) = 2775/111=25. Откуда либо а=9, b=7, либо a=8, b=9.

3) Начертите два четырёхугольника, из которых можно сложить как треугольник, так и пятиугольник (накладывать даже частично фигуры друг на друга нельзя!). Покажите, как это можно сделать.

**Решение:** Например, разрежем треугольник так, как показано на рисунке. При этом D - середина отрезка ВС. Из полученных четырёхугольников получим пятиугольник, повернув АВDE вокруг точки D на 1800:

****

4) В ресторане встретились 55 индийцев и турков, каждый из которых пил либо чай, либо кофе. Все индийцы говорят правду, когда пьют чай, и обманывают, когда пьют кофе, а все турки – наоборот. На вопрос «Вы пьёте кофе?» ответили «Да» 44 человека, а на вопрос «Вы турок?» ответили «Да» 33 человека. С утверждением «На улице идёт дождь» согласились 22 человека. Сколько индийцев в ресторане пьют чай?

**Ответ:** *никто из индийцев не пил чай в ресторане.*

**Решение:** На вопрос «Вы пьёте кофе?» ответить «Да» индиец не может вообще, поэтому в ресторане находится ровно 44 турка, которые на этот вопрос ничего, кроме «Да», ответить не могут. Значит, индийцев – 11.

На вопрос «Вы турок?» ответить «Да» могли только пьющие кофе. Следовательно, 33 человека в ресторане пили кофе, а остальные 22 - чай.

Обозначим число индийцев, пивших чай (**ИЧ**), за х. Тогда индийцев, пивших кофе (**ИК**), было (11- х), турков, пивших чай (**ТЧ**), было (22- х), а турков, пивших кофе (**ТК**), было (22+х).

Следовательно, правдивых в ресторане было (**ИЧ** и **ТК**) (22+2х) человек, а лгали (**ИК** и **ТЧ**) (33 - 2х) человек. Заметим, что правдивых ЧЁТНОЕ количество, а лгунов - НЕЧЁТНОЕ! Так как с утверждением «На улице идёт дождь» согласились 22 человека (ЧЕТНОЕ!), то они не могли лгать.

Значит, утверждение о дожде – правда и 22+2х = 22. Откуда х=0. Следовательно, чай не пьёт ни один индиец.

5) Знайка поделился своими наблюдениями с малышами. Он заметил, что если цифры

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

написать палочками, как на калькуляторе, то каждая из этих цифр, в отличие от остальных, при перевороте также останется цифрой! Знайка озадачился вопросом: "Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из этих цифр так, что при перевороте числа получится трёхзначное число и произведение цифр при этом сохранится?" Шпунтик утверждает, что ответ на вопрос меньше ста, а Винтик - что больше ста. Кто из них прав и почему?

**Ответ:** *прав был Винтик.*

**Решение:** Заметим, что под "переворотом" Знайка понимал именно поворот на 1800 , а не симметрию относительно вертикальной прямой, как посчитали некоторые. Ведь при данной симметрии цифры 6 и 9 перестают быть цифрами!

При перевороте цифры 0,1,2,5 и 8 сохраняются, а 6 и 9 превращаются друг в друга. Поскольку после переворота трёхзначного числа должно получится опять трёхзначное, 0 может быть использован только при написании цифры десятков. При использовании 0 в десятках произведение цифр сохранится в любом случае, т.к. останется равным нулю. Трёхзначных чисел с 0 в середине из оставшихся цифр можно составить 6×6=**36**.

Так как цифры 1,2,5 и 8 сохраняются, то числа, записанные этими цифрами, не изменят произведение своих цифр. Таких чисел 4×4×4=**64**.

Но существуют **ещё** числа, которые нам подходят. Например, 619,698 и 956, которые при переворачивании не меняют произведение цифр. Так что уже можно дать обоснованный ответ, т.к. уже найдено **более ста** чисел.

Возможно вычислить и количество оставшихся подходящих чисел:

Это числа, содержащие в записи 6 и 9, которые при переворачивании меняются местами, и одну из цифр 1,2,5,8. Таких чисел существует ровно (4×2×1) ×3=**24**.

Таким образом, всего чисел, заинтересовавших Знайку, 36+64+24 = **124**.

***РЕШЕНИЯ***

***8 класс***

1) У Пети есть три различные карточки. На каждой из них написано трёхзначное число, не делящееся на 37. Сумма чисел на двух любых карточках делится на 37. Петя выкладывает карточки на стол рядом друг с другом. Сумеет ли он составить хотя бы одно число, делящееся на 37? Если да, то сколько всего таких различных чисел он сможет составить?

**Ответ:** *таких карточек, которые описаны в условии задачи, не существует!*

**Решение:** Предположим, что такие три числаА, В и С существуют. Пусть а - остаток А при делении на 37, b - остаток B при делении на 37, с - остаток С при делении на 37. По условию ни одно из чисел не делится на 37. Значит, числа a, b и c не равны 0. При этом, А+В, А+С и В+С делятся на 37. Следовательно, a+b=a+c=b+c=37. Тогда a=b=c=37/2, т.е. остатки не являются целыми!

2) Из трёх палочек составлен не равносторонний треугольник. Разрешается составить новый треугольник, отломив по одному одинаковому кусочку от любых двух палочек и приклеив их к третьей. Восьмиклассник Петя уверен, что, действуя таким образом не более двух раз, можно добиться, чтобы треугольник стал равносторонним. Прав ли он?

**Ответ:** *Петя прав. Из любого неравностороннего треугольника за 1 или 2 хода можно получить равносторонний.*

**Решение:**

I случай: треугольник равнобедренный и его боковая сторона больше его основания.

Обозначим длины его сторон а, а и с. При этом а > с. Тогда отломим от каждой боковой стороны кусочек, равный (а - с)/3 и оба этих кусочка приклеим к с:

а - (а - с)/3 = 2/3 a + 1/3 c

с + 2 (а - с)/3 = 2/3 a + 1/3 c

Таким образом за 1 ход все палочки стали равной длины.

II случай: треугольник равнобедренный и его боковая сторона меньше его основания или все стороны треугольника различны.

Обозначим длины его сторон а, b и с. При этом а > b ≥ с. Тогда отломим от каждой из сторон а и b кусочек, равный (а - с)/3, и оба кусочка приклеим к c:

x = а - (а - с)/3 = 2/3 a + 1/3 c

y = с + 2 (а - с)/3 = 2/3 a + 1/3 c

z = b - (а - с)/3 *(z >0, т.к. b > a - c (неравенство треугольника))*

Полученные таким образом x и y равны, и z < x, так как

x - z = 2/3 a + 1/3 c - (b - (а - с)/3) = a - b > 0.

Получился треугольник, который мы рассмотрели в первом случае.

3) В Зазеркалье живут весёлые многоножки. Весёлая n-ножка – это набор из n целых чисел, каждое из которых равно произведению всех остальных. Например, три числа, каждое из которых равно произведению всех остальных – это весёлая трёхножка, четыре таких числа – это весёлая четырёхножка и т.д. Любая перестановка чисел в весёлой многоножке образует ту же самую весёлую многоножку. Каково наибольшее количество различных весёлых

2015 – ножек, которые могут встретиться вам в Зазеркалье?

**Ответ:** *1009.*

**Решение:** весёлые трёхножки перебираются легко: (0;0;0), (1;1;1), (-1,-1,1).

Ясно, что вариант (все нули) подходит для любой n-ножки. Также подходят все n-наборы, в которых чётное (включая 0) количество (-1) и остальные числа – единицы.

Докажем, что чисел (-1) в весёлой многоножке может быть только чётное количество. Если мы выбрали в качестве одного из чисел (-1), то среди оставшихся чисел других (-1) осталось нечётное число, произведение оставшихся чисел равно -1. Если в качестве одного из чисел мы выбрали 1, то среди оставшихся чисел (-1) осталось чётное число, произведение оставшихся равно 1.

Значит, различных весёлых 2015 – ножек будет столько, сколько чётных чисел в промежутке от 0 до 2015 (их **1008**) и ещё **один** вариант – все нули.

4) Начертите два четырёхугольника, из которых можно сложить и треугольник, и четырёхугольник, и пятиугольник (накладывать даже частично фигуры друг на друга нельзя!). Покажите, как это можно сделать.

**Решение:** Например, разрежем треугольник так, как показано на рисунке. При этом D - середина отрезка ВС, а АЕ=DE. Из полученных чётырёхугольников получим пятиугольник, повернув АВDE вокруг точки D на 1800 (см. средний чертёж). Сложить из данных четырёхугольников четырёхугольник можно, перевернув ABDE и поменяв местами А и D (симметрия относительно серединного перпендикуляра к отрезку AD).

****

5) Рон и Гермиона проникли в сейф Беллатрисы Лестрейндж, где лежали одинаковые предметы. На все лежащие в нём предметы наложено заклятие удвоения: прикоснувшись к предмету, вы превращаете его (этот предмет) в удвоенное количество предметов, к которым **не прикоснулись**. Гермиона владеет заклинанием «*Трисекция*», которое позволяет уменьшать количество всех находящихся в сейфе предметов в три раза, **если** это количество делится на три. Она воспользовалась этим заклинанием (возможно, неоднократно) после того, как Рон несколько раз наступил на золотые грабли, и восстановила первоначальное число предметов. Сколько предметов могло лежать в сейфе первоначально? Укажите все возможные варианты.

**Ответ:** *в сейфе лежало два предмета.*

**Решение:** ***К сожалению, большинство учащихся невнимательно прочли условие задачи и не поняли, как же действует заклятие удвоения.***

"... вы превращаете его (этот предмет) в удвоенное количество предметов, к которым **не прикоснулись**..."!!! Т.е., если в сейфе было 5 предметов, после прикосновения к одному из них, предметов станет 4×2 + 4 = 12.

Если в сейфе было N предметов, то после прикосновения к одному из них, этот предмет превратится в 2×(N-1). Остальные N-1 также останутся в сейфе. Следовательно, после прикосновения к одному из **N** предметов, в сейфе станет **3×(N-1)** предмета.

Пусть первоначально в сейфе находилось А предметов. Тогда после прикосновений их становилось (3А-3), (9А-12), (27А-39), и т.д.

Очевидно, что после первой оплошности Рона, Гермиона не могла воспользоваться заклинанием «*Трисекция*», иначе осталось бы (А-1) предметов.

Но после второй и далее оплошности Рона получаются числа, которые делятся на 3, но не делятся на 9! Действительно, если N делится на 3, то (N-1) не делится на 3, а значит, 3×(N-1) не делится на 9. Делаем вывод о том, что Гермиона воспользовалась заклинанием «*Трисекция*» только ОДИН раз!

Очевидно, что после прикосновения к предмету, их становится больше. Пусть первоначально в сейфе находилось А предметов, а после **некоторого** прикосновения Рона, их стало В. Тогда после следующего прикосновения (*а мы выяснили, что их было как минимум два*), предметов стало (3В-3). Применив «*Трисекцию*», получим (В-1) = А предметов - на **1** меньше, чем после **некоторого** прикосновения! Значит, **некоторое** прикосновение было ПЕРВЫМ, а Гермиона воспользовалась «*Трисекцией*» после второго.

Тогда после первого прикосновения предметов стало (3А-3), после второго - (9А-12), после применения «*Трисекции*» стало (9А-12)/3=3А-4=А. Откуда **А=2**.